FIUBA 03-07-2014 | Análisis Matemático II (61.03, 81.01) | Integrador - Tema 1

Indicar **claramente** apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deben estar **debidamente justificadas**. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS BIEN RESUELTOS

Apellido: .... Nombres : ....

Padrón: ....

1. a) Use el teorema de Green para calcular el volumen bajo el paraboloide elíptico $z = 4 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$; $z \geq 0$ por medio de una integral de línea.

   b) Calcule el volumen.

2. Considere la función $z = f(x, y)$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2+y^2) & \text{si } x^2+y^2 \leq 4 \\ 4-\sqrt{x^2+y^2} & \text{si } 4 \leq x^2+y^2 \leq 16 \end{cases}$$

   a) Hallar los conjuntos de nivel k de $f(x, y)$ con $k = 4$, $k = 2$, $k = 1$.

   b) Calcular el volumen bajo la superficie $z = f(x, y)$, $z \geq 0$.

3. Un triángulo en $\mathbb{R}^3$ tiene vértices A, B, C. El campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene integral independiente del camino. Se sabe que $\int_{AB} \vec{F}.d\vec{l} = 2(a^2 + b)$ y $\int_{AC} \vec{F}.d\vec{l} = -\frac{1}{2}b^2 + a + ab$; $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
   Hallar los valores de a y b para que $\int_{BC} \vec{F}.d\vec{l}$ sea máxima.

4. Sea $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Encuentre un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de modo que el flujo de dicho campo a través de la superficie que limita la región D coincida con la masa de D, si la densidad en cada punto es $\delta(x, y, z) = y^2 + z^2$.

5. La curva C es el borde de la superficie definida por la gráfica de $f(x, y) = x^3 y$ sobre el cuadrado $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\, ,\, 0 \leq y \leq 1\}$ orientado en sentido positivo.
   Demostrar que $\int_C x\,dx + \frac{1}{3}x^3\,dy - \frac{1}{2}z^2\,dz$ da el momento de inercia del cuadrado respecto del eje y, siendo la densidad $\delta(x, y, z) = 1$ $\forall (x, y) \in A$.

Coloquio 3/7/2104

1 a) Use el teorema de Green para calcular el volumen bajo el paraboloide $z = 4 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$; $z \geq 0$ **por medio de una integral de línea.**

b) Calcular el volumen.

Solución: **a)** Para poder aplicar el teorema de Green en el plano hay que pensar que el volumen bajo el paraboloide está dado por:

$Vol =: \iiint_V dx\,dy\;dz = \iint_D \left[\int_0^{4-(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})} dz \right] dx\;dy = \iint_D \left[4 - (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}) \right] dx\;dy$, considerando esta integral doble, hay que buscar un campo vectorial $\overline{F} : R^2 \to R^2 / \overline{F}(x,y) = \left(P(x,y)\;,\;Q(x,y)\right)$ de clase C[1] tal que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4 - (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})$ siendo D la región que se obtiene proyectando el paraboloide en el plano $z = 0$, cuya curva frontera es una curva cerrada simple, en este caso la proyección sobre el plano *xy* es la región $D : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq 4 \to x^2 + y^2 \leq 8$ cuya frontera es la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$, es decir una curva de Jordan (cerrada y simple).

Elegimos un campo vectorial que cumpla

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4 - (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}) = 4 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 4 - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$, por ejemplo

$\overline{F}(x,y) = \left(y\left(\frac{x^2}{2}\right),\; x\left(4 - \frac{y^2}{2}\right) \right)$ entonces por teorema de Green:

$$\int_C \overline{F}\;.\;\overline{dl} = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\;dy = \iint_D \;(4 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2})\;dx\;dy = Volumen\;\;pedido$$

b) El volumen, usando coordenadas cilíndricas está dado por:

$$Vol =: \iiint_V dx\,dy\;dz = \iint_D \left[\int_0^{4-(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})} dz \right] dx\;dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{4-\frac{r^2}{2}} r\,dz\;dr\;d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8}} (4 - \frac{r^2}{2})\;r\;dr\;d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8}} (4r - \frac{r^3}{2})\;dr\;d\theta = \int_0^{2\pi} (2r^2 - \frac{r^4}{8})_0^{\sqrt{8}}\;d\theta = (16 - 8)\;2\pi = 16\pi\,unidades\;\;de\;\;vol.$$

2- Considere la función $z = f(x,y)$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2+y^2) & si \quad x^2+y^2 \le 4 \\ 4-\sqrt{x^2+y^2} & si \quad 4 \le x^2+y^2 \le 16 \end{cases}$$

a) **Hallar los conjuntos de nivel *k* de $f(x,y)$ con *k* = 4, *k* = 2, *k* = 1.**

b) **Calcular el volumen bajo la superficie $z = f(x,y), \; z \ge 0$.**

***Solución*:**

a) *Conjunto de nivel* $4 = \phi$ (el plano $z = 4$ no interseca la gráfica de ninguna de las 2 superficies).

Para k = 2:

$$2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad \Rightarrow \; x^2+y^2 = 4$$

$$2 = 4-\sqrt{x^2+y^2} \; \Rightarrow \; x^2+y^2 = 4$$

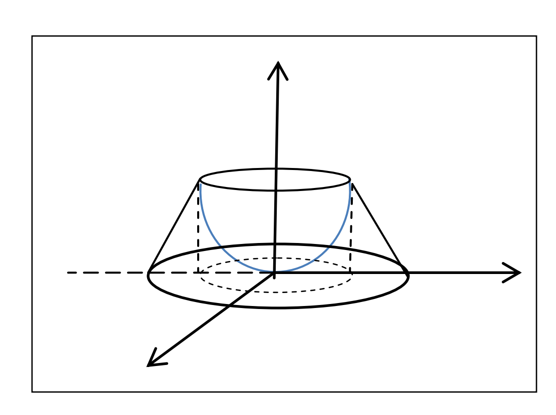
El Conjunto de nivel es
$$2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad \Rightarrow \; x^2+y^2 = 4$$
$$2 = 4-\sqrt{x^2+y^2} \; \Rightarrow \; x^2+y^2 = 4$$

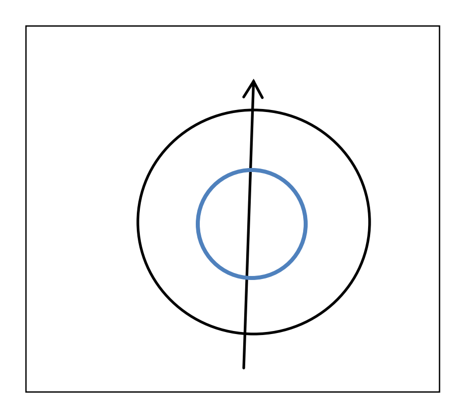
Para k = 1 :

$$1 = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad \Rightarrow \; \underline{\underline{x^2+y^2 = 2}}$$

$$1 = 4-\sqrt{x^2+y^2} \; \Rightarrow \; \underline{\underline{x^2+y^2 = 9}}$$

b) **El volumen es la suma del volumen bajo el paraboloide más el volumen bajo el cono.**





Volumen = $\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\frac{1}{2}r^2} dz \; r\,dr \; d\theta + \int_0^{2\pi}\int_2^{4}\int_0^{4-r} dz \; r\,dr \; d\theta = \frac{44}{3}\pi$

3- Un triángulo en R³ tiene vértices A, B, C . El campo vectorial $\overline{F}: R^3 \rightarrow R^3$ tiene integral independiente del camino. Se sabe que

$$\int_{AB} \overline{F}\ .\ \overline{dl} = 2(a^2 + b) \quad y \quad \int_{AC} \overline{F}\ .\ \overline{dl} = -\frac{1}{2}b^2 + a + ab \qquad \forall (a,b) \in R\ .$$

Hallar los valores de *a* y *b* para que $\int_{BC} \overline{F}\ .\ \overline{dl}$ sea máxima.

***Solución*:**

El campo vectorial $\overline{F}: R^3 \rightarrow R^3$ es un campo conservativo, entonces $\nabla \times \overline{F} = \overline{0}$, por lo tanto si se aplica el teorema del rotor, la circulación a lo largo de un curva cerrada recorrida en sentido positivo es nula, planteamos esto

$$\int_{AB} \overline{F}\ .\ \overline{dl} + \int_{BC} \overline{F}\ .\ \overline{dl} + \int_{CA} \overline{F}\ .\ \overline{dl} = 0$$

$$2(a^2 + b) + \int_{BC} \overline{F}\ .\ \overline{dl} - (-\frac{1}{2}b^2 + a + ab) = 0$$

$$\int_{BC} \overline{F}\ .\ \overline{dl} = -\frac{1}{2}b^2 + a + ab - 2(a^2 + b) = h(a,b)$$

$$\frac{\partial h}{\partial a} = 1 + b - 4a = 0 \qquad \rightarrow \quad b = 4a - 1$$

$$\frac{\partial h}{\partial b} = -b + a - 2 = 0 \qquad reemplazando\ \ b\, en\ esta\ ec.:$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad ; \quad b = -\frac{7}{3}$$

Para determinar si para los valores $(a,b) = \left(-\frac{1}{3}\ ; -\frac{7}{3}\right)$ hay un máximo, se analiza el determinante Hessiano en este punto:

$$H\left(-\frac{1}{3}\ ; -\frac{7}{3}\right) = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad \wedge \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial a^2} = -4 < 0$$

Como el Hessiano es mayor que 0 y la derivada segunda es negativa, para los valores de $(a,b) = \left(-\frac{1}{3}\ ; -\frac{7}{3}\right)$ la circulación $\int_{BC} \overline{F}\ .\ \overline{dl}$ es máxima.

4- Sea $D=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2\le 1\}$. **Encuentre un campo vectorial** $\overline{F}:R^3\to R^3$ **de modo que el flujo de dicho campo a través de la superficie que limita la región *D* coincida con la masa de D, si la densidad en cada punto es** $\delta(x,y,z)=y^2+z^2$

***Solución*:**

La masa del sólido definido por $D=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2\le 1\}$ está dada por:

$$Masa=\iiint_D \delta(x,y,z)\ dx\ dy\ dz=\iiint_D (y^2+z^2)\ dx\,dy\,dz$$

Se busca un campo vectorial que cumpla las hipótesis del teorema de Gauss y tal que la divergencia del campo sea y^2+z^2, por ejemplo: $\overline{F}(x,y,z)=(x\,y^2\ ,\ y\,z^2,x)\ /\ \overline{F}\in C^1$

El teorema dice que el flujo a través de la superficie frontera de un sólido elemental V coincide con la integral triple de la divergencia del campo sobre V.

$$\iint_{\partial D}\overline{F}\ .\ \overline{ds}=\iiint_D \nabla.\,\overline{F}\,dx\ dy\ dz=\iiint_D (y^2+z^2)\ dx\,dy\,dz=Masa\ (D)$$

Por lo tanto el campo $\overline{F}(x,y,z)=(x\,y^2\ ,\ y\,z^2,x)$ cumple lo pedido.

5- La curva C es el borde de la superficie definida por la gráfica de $f(x,y)=x^3y$ **sobre el cuadrado** $A=\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\}$ orientado en sentido positivo.

Demostrar que $\int_C (x\ ,\ \frac{1}{3}x^3,-\frac{1}{2}z^2)\ .\ \overline{dl}$ **es igual al momento de inercia del cuadrado respecto del eje *y*, siendo la densidad** $\delta(x,y)=1\quad \forall(x,y)\in A$.

***Solución*:**

El momento de inercia del cuadrado respecto del eje *y*, siendo la densidad $\delta(x,y)=1\quad \forall(x,y)\in A$ está dado por:

$I_y=\iint_A x^2.\underbrace{1}_{\delta(x,y)}\ dx\,dy=\int_0^1\int_0^1 x^2\ dx\ dy$, donde x^2 es la distancia al cuadrado de un punto de *A* al eje *y*. Como el campo es C^1 aplicamos el teorema de Stokes, el Rotor del campo es:_

$$\nabla\times\overline{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & \frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{2}z^2 \end{vmatrix}=(0\ ,\ 0\ ,\ x^2)\ \Rightarrow\ \int_C \overline{F}.\overline{dl}=\iint_S (0,\ 0,x^2)\ .(0,0,1)\,ds$$

$$\int_C \overline{F}.\overline{dl}=\int_C (x\ ,\ \frac{1}{3}x^3,-\frac{1}{2}z^2)\ .\ \overline{dl}=\iint_S \underbrace{(0,\ 0,x^2)}_{\nabla\times\overline{F}}\ .(0,0,1)\,ds=\int_0^1\int_0^1 x^2\ dx\ dy=I_y$$